MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ŞI SPORTULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CARAŞ-SEVERIN
Strada Ateneului 320112, Nr. 1, Reşița, Caraş-Severin, ROMÂNIA
Tel: 0255-214238; Fax: 0255-216042
E-mail: isjcaras@cs.ro; Web: http://www.cs.isj.edu.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2010 – FAZA LOCALĂ
13.02 2010

CLASA A XII-A
FILIERA TEORETICĂ PROFIL REAL – ŞTIINȚE ALE NATURII

1. a) Să se determine $(a,b)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*$ pentru care legea de compoziție definită pe $\mathbb{R}$ prin $x*y=xy+4ax+by$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$ este asociativă şi comutativă.

b) Pe $M=(0,1)$ se defineşte legea $x\circ y=\dfrac{xy}{2xy-x-y+1},\forall x,y\in M$. Determinați elementul neutru al legii definite şi simetricul elementului $x=\dfrac{1}{4}\in M$ față de legea "$\circ$".

c) Să se precizeze, justificând răspunsurile, care dintre următoarele mulțimi nu sunt părți stabile ale lui $\mathbb{R}$ în raport cu înmulțirea numerelor reale: $A=\{5n/n\in\mathbb{Z}\}$, $B=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

2. Se consideră mulțimea $H=[2,\infty)$ şi operația "$\square$" definită prin $x\square y=xy-2x-2y+6$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

a) Arătați că operația "$\square$" este lege de compoziție pe mulțimea considerată;
b) Studiați dacă există $p\in\mathbb{Z}$ astfel încât $x\square p=p\square x=p$, $\forall x\in\mathbb{R}$;
c) Determinați cel mai mic număr întreg m pentru care $(-4)\square(-3)\square(-2)\square(-1)\square(0)\square(1)\square(2)\square(3)\square(4)<m$.

3. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x\cdot\ln x$

a) Să se determine $\displaystyle\int\frac{f(x)}{x}dx$, $x\in(0,\infty)$.

b) Să se determine $\displaystyle\int\frac{f(x)}{x^2}dx$, $x\in(0,\infty)$.

c) Să se demonstreze că, pentru orice primitivă F a funcției *f*, este adevărată inegalitatea:
$F(2007)+F(2008)<F(2009)+F(2010)$.

4. Se consideră funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=1+x+x^2+x^3$.

a) Rezolvați ecuația $g(x)=0$.
b) Dacă *G* este o primitivă a funcției g pentru care $G(0)=0$, calculați $G(1)$
c) Determinați $\displaystyle\int\frac{x-1}{g(x)}dx$, $x\in(0,\infty)$.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 3 ore
Fiecare problemă se punctează de la 0 la 7 puncte.